一般選抜Ａ日程（大学入学共通テスト併用型） 解答例

〔 I 〕 (1) $8\sqrt{6}-12$

(2) $(2,\,2)$

(3) $x=2$

(4) (a) -37 (b) $3\sqrt{21}$

〔 II 〕 (1) 6 文字の並べ方は $6!$ 通りあり, S が K より右に並ぶ, または左に並ぶのいずれかであるから,

$$\frac{6!}{2}=360\,(\text{通り})$$

(2) 6 文字のうち S, K, N の 3 文字を 1 文字とみなすと, 並べ方は $4!$ 通りある．その並べ方のおのおのに対して, S, K, N の並べ方は $3!$ 通りある．よって, 求める並べ方の総数は

$$4!\times 3!=144\,(\text{通り})$$

(3) H, I, E の 3 文字の並べ方は $3!$ 通りある．その並べ方のおのおのに対して, これら 3 文字の間の 2 箇所あるいは両端の合わせて 4 箇所から 3 箇所を選び, 残りの S, K, N をひとつずつ並べる並べ方は ${}_4\mathrm{P}_3$ 通りある．よって, 求める並べ方の総数は

$$3!\times {}_4\mathrm{P}_3=144\,(\text{通り})$$

〔 III 〕 (1) (a) 漸化式から $a_3=3a_2-1$ より,

$$3a_2=a_3+1=41+1=42$$

よって, $a_2=14$. 同様に, $a_2=3a_1-1$ より,

$$3a_1=a_2+1=14+1=15$$

したがって, $a_1=5$.

(b) 漸化式 $a_{n+1}=3a_n-1$ は, $\alpha=3\alpha-1$ を満たす解 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ を用いて, 次のように変形される.

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$$

ゆえに, $\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$, 公比 3 の等比数列であるから,

$$a_n-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\cdot 3^{n-1}$$

したがって,

$$a_n=\frac{9}{2}\cdot 3^{n-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}+1\right)$$

(2) (a) $t=\cos\theta+\sin\theta$ とおくと, $t^2=1+2\cos\theta\sin\theta=1+\sin 2\theta$ より $\sin 2\theta=t^2-1$ であるから,

$$f(\theta)=2(t^2-1)-3\sqrt{6}\,t+8=2t^2-3\sqrt{6}\,t+6$$

(b)　$t = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ と合成できる．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$ であるから，$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$. したがって，

$$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

(c)　(a) より $f(\theta) = 2t^2 - 3\sqrt{6}t + 6 = \left(2t - \sqrt{6}\right)\left(t - \sqrt{6}\right) > 0$ を，(b) で求めた t の範囲で解くと，$-1 \leqq t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{6}}{2}$. これより，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ だから，求める不等式の解は $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12} < \theta \leqq \pi$.

〔 IV 〕 (1)　内分点の公式から，$w = \dfrac{1 \cdot (2+i) + 2z}{2+1} = \dfrac{2z + (2+i)}{3}$.

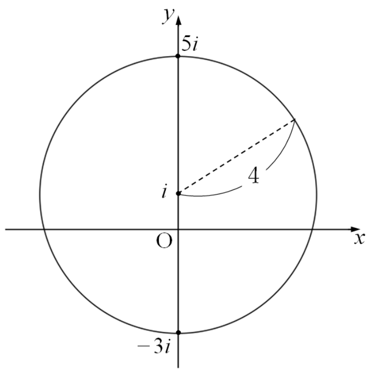
(2)　$w = \dfrac{2z + (2+i)}{3}$ を z について解くと，$3w = 2z + (2+i)$ より，

$$z = \frac{3w - (2+i)}{2}$$

z は円の方程式 $|z - (-1+i)| = 6$ を満たすので，これに上式を代入すると

$$\left|\frac{3w - (2+i)}{2} - (-1+i)\right| = 6$$
$$|3w - (2+i) - 2(-1+i)| = 12$$
$$|3w - 3i| = 12$$
$$|w - i| = 4$$

となり，点 Q(w) は中心 i, 半径 4 の円を描くことがわかる．



(3)　複素数平面上に 2 点 B(3), C(i) をとり，(2) で求めた円を C とする．点 B は円 C の内部にあるから，直線 BC と円 C の 2 つの交点のうち，点 B に遠い方の交点を D, 近い方の交点を E とすると，

$|w - 3|$ の最大値 = BD = 4+BC,　$|w - 3|$ の最小値 = BE = 4− BC

BC $= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ だから，最大値は $4 + \sqrt{10}$, 最小値は $4 - \sqrt{10}$.

〔 V 〕 (1)　$g(x) = e^x - x^2$ とおく．このとき，

$$g'(x) = e^x - 2x, \qquad g''(x) = e^x - 2$$

$x \geqq 1$ のとき，

$$g''(x) = e^x - 2 \geqq e^1 - 2 = e - 2 > 0$$

よって, $g'(x)$ は区間 $x \geqq 1$ で単調に増加するので,

$$g'(x) \geqq g'(1) = e - 2 > 0 \qquad (x \geqq 1)$$

ゆえに, $g(x)$ も区間 $x \geqq 1$ で単調に増加し

$$g(x) \geqq g(1) = e - 1 > 0 \qquad (x \geqq 1)$$

したがって, $x \geqq 1$ のとき, $g(x) = e^x - x^2 > 0$ より $e^x > x^2$ が成り立つ.

(2) 部分積分法を用いると,

$$\begin{aligned} \int xe^{-x}\,dx &= \int x\left(-e^{-x}\right)'dx \\ &= x\left(-e^{-x}\right) - \int 1 \cdot \left(-e^{-x}\right)dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C \qquad\qquad (C\ \text{は積分定数}) \end{aligned}$$

(3) (2) より

$$f(x) = \int_0^{x^2} t\,e^{-t}\,dt = \left[-te^{-t} - e^{-t}\right]_0^{x^2} = -x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + 1$$

ここで, $x \geqq 1$ のとき $x^2 \geqq 1$ より, (1) を用いて

$$0 \leqq x^2e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}} < \frac{x^2}{(x^2)^2} = \frac{1}{x^2}$$

よって, $x \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{x^2} \to 0$ だから, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x^2} = 0$. ゆえに,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + 1\right) = 0 + 0 + 1 = 1$$