M-B 解答

〔 I 〕 (1) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ であるから,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) - \cos^2 2x \\ &= -\cos^2 2x - \cos 2x + 1 \end{aligned}$$

ここで, $t = \cos 2x$ とおくと, $0 \leqq 2x \leqq 2\pi$ より, $-1 \leqq t \leqq 1$ であり,

$$f(x) = -t^2 - t + 1 = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

よって, $t = -\dfrac{1}{2}$ のとき, 最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる.
そのときの x は, $t = \cos 2x = -\dfrac{1}{2}$ より, $2x = \dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi$. よって, $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2}{3}\pi$.
(答) 最大値 $\dfrac{5}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2}{3}\pi$. □

(2) $\log_{10} 2^{2022} = 2022 \log_{10} 2 = 2022 \times 0.3010 = 608.622$.
$0.301 \times 2 < 0.622 < 1 - 0.301$ だから $\log_{10} 2^2 < 0.622 < \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = \log_{10} 5$. よって, $4 < 10^{0.622} < 5$ であって, $4 \times 10^{608} < 10^{608.622} < 5 \times 10^{608}$. 以上より, 2^{2022} は 609 桁の整数で, 最高位の数字は 4. □

(3) $a = \dfrac{9a-10}{a+2}, a+2 \neq 0$ が成り立てばよい. 1 つ目の式で分母を払って $a^2 + 2a = 9a - 10$. これを整理すると $(a-2)(a-5) = 0$ だから $a = 2, 5$. □

(4) $z = \dfrac{2}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{2(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ より $z^6 = -1$. よって $z^{2022} = z^{6\times 337} = (-1)^{337} = -1$. 答えは -1. □

〔 II 〕 (1) $(a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5) = (1,\, 1,\, 1,\, 0,\, 0)$ であり, $a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$.

また $(b_1,\, b_2,\, b_3,\, b_4) = (0,\, 0,\, 1,\, 0)$ であり, $b = \dfrac{1}{8}$. □

(2)

$$\begin{aligned} 32a &= 16a_1 + 8a_2 + 4a_3 + 2a_4 + a_5 \\ &= a_1 \cdot 2^4 + a_2 \cdot 2^3 + a_3 \cdot 2^2 + a_4 \cdot 2 + a_5 \end{aligned}$$

であり, 整数 $32a$ の 2 進数表記が得られる.

$\dfrac{7}{32} \leqq a \leqq \dfrac{1}{4}$ より $7 \leqq 32a \leqq 8$ である. から,

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 0)$$

の 2 通り, ゆえに, 求める確率は

$$\frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

□

(3) 表がちょうど 2 回出る場合を $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ で表すと次の 10 通りである.

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = {} & (1, 1, 0, 0, 0),\ (1, 0, 1, 0, 0),\ (1, 0, 0, 1, 0), \\ & (1, 0, 0, 0, 1),\ (0, 1, 1, 0, 0),\ (0, 1, 0, 1, 0), \\ & (0, 1, 0, 0, 1),\ (0, 0, 1, 1, 0),\ (0, 0, 1, 0, 1),\ (0, 0, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

対応する (b_1, b_2, b_3, b_4) は次の通りである.

$$\begin{aligned} (b_1, b_2, b_3, b_4) = {} & (0, 1, 0, 0),\ (1, 1, 1, 0),\ (1, 0, 1, 1),\ (1, 0, 0, 1),\ (1, 0, 1, 0) \\ & (1, 1, 1, 1),\ (1, 1, 0, 1),\ (0, 1, 0, 1),\ (0, 1, 1, 1),\ (0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

$$16b = b_1 \cdot 2^3 + b_2 \cdot 2^2 + b_3 \cdot 2 + b_4$$

であるから, 上の (b_1, b_2, b_3, b_4) に対する整数 $16b$ (2 進数表示 (b_1, b_2, b_3, b_4) に対応する整数) は以下の通りである.

$$\begin{aligned} 16b = {} & 4,\ 14,\ 11,\ 9,\ 10 \\ & 15,\ 13,\ 5,\ 7,\ 2 \end{aligned}$$

$16b$ を 4 で割った余りが 1 であるのは $16b = 5,\ 9,\ 13$ の 3 通りであるから, 求める確率は $\dfrac{3}{32}$ である.

〔 III 〕 (1) $a^2+b^2=1$ かつ $(a,\, b) /\!/ (5a-b,\, -a+5b)$ が成り立てばよい．したがって

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a(-a+5b)=b(5a-b) \end{cases}$$

を解いて, $(a,b)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順). □

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a(5a-b)+b(-a+5b)=5a^2-2ab+5b^2=5\left(a-\dfrac{1}{5}b\right)^2+\dfrac{24}{5}b^2$ だから,

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a-\dfrac{1}{5}b=0 \\ b=0 \end{cases}$$

が $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が垂直であるための必要十分条件である．この連立方程式は解を持たないので (第 2,3 式から $a=b=0$ を得るが, これは第 1 式を満たさない)$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が垂直になることはない． □

〔 IV 〕 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = -4.$ $\square$

(2)

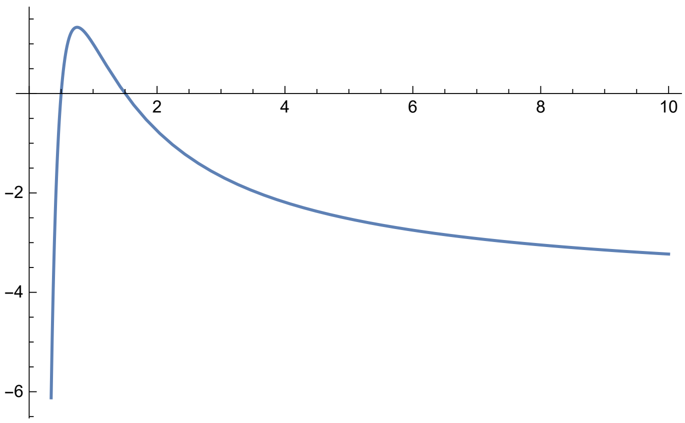
$$f'(x) = \frac{ax^2 - (ax-3)\times 2x}{x^4} = -\frac{ax-6}{x^3}$$

と $a > 0$ より $x = \dfrac{6}{a}$ で極大値をとる． $f\left(\dfrac{6}{a}\right) = \dfrac{1}{12}a^2 - 4$ より $\dfrac{1}{12}a^2 - 4 = \dfrac{4}{3}$ を解いて $a = \pm 8$. $a > 0$ より $a = 8$. $\square$

(3) $a = 8$ のとき $f'(x) = -\dfrac{8x-6}{x^3}$. $f''(x) = -\dfrac{8\times x^3 - (8x-6)\times 3x^2}{x^6} = \dfrac{2(8x-9)}{x^4}$ より曲線 $y = f(x)$ は $x = \dfrac{9}{8}$ のとき変曲点をとる．増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	$\frac{9}{8}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$			極大			

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$. (1) より $y = f(x)$ の漸近線は $y = -4$.



$y = f(x)$ と x 軸との交点の x 座標は $x = \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}$. 上の図が答え $\square$

〔 V 〕 (1) $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$ と $y=\dfrac{\tan\theta}{2}x$ の交点の x 座標を求める.

$\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{\tan\theta}{2}x$ の両辺を二乗して $1-\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{1}{4}\tan^2\theta\cdot x^2$.

よって $\dfrac{1}{4}(1+\tan^2\theta)x^2=1$ から $x^2=4\cos^2\theta$. $x=2\cos\theta$.

したがって点 B は $(2\cos\theta,\ \sin\theta)$. □

(2) 点 B$(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通り y 軸に平行な直線と x 軸との交点を C としたとき, 点 C の座標は $(2\cos\theta,\ 0)$.

図形 OABC を x 軸のまわりに回転した立体の体積を V_1, 三角形 OBC を x 軸のまわりに回転した立体の体積を V_2 としたとき, 求める体積は V_1-V_2 である.

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi\int_0^{2\cos\theta}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2dx=\pi\int_0^{2\cos\theta}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx \\ &= \pi\left(2\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta\right). \end{aligned}$$

一方, $|\mathrm{OC}|=2\cos\theta$, $|\mathrm{BC}|=\sin\theta$ より

$$V_2=\frac{2}{3}\pi(\sin\theta)^2\cos\theta.$$

従って, 求める体積 V は

$$V=\pi\left(2\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta\right)-\frac{2}{3}\pi(\sin\theta)^2\cos\theta=\frac{4}{3}\pi\cos\theta.$$

□