一般選抜 B 日程 解答例

〔 I 〕

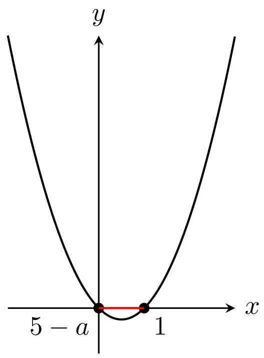
(1)　$\sin^2\dfrac{\pi}{12}+\cos^2\dfrac{\pi}{12}=1,\ 2\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}=\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ であるから

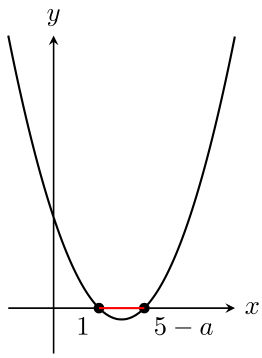
$$\left(\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\right)^2=\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}=1+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$$

よって,

$$\left(\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\right)^4=\left(\left(\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\right)^2\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

(2)　$x^2+(a-6)x-a+5=(x-1)(x+a-5)$ であるから $y=x^2+(a-6)x-a+5$ のグラフは, 下に凸の放物線で, x 軸との共有点の x 座標は（重複も含めて）$x=1, 5-a$ である.





よって, $x^2+(a-6)x-a+5\leqq 0$ を満たす整数 x が $x=1$ のみであるための条件は

$$0<5-a<2,\quad \text{つまり},$$
$$3<a<5$$

である.

(3)　4 つの数それぞれを 6 乗すると,

$$(\sqrt{3})^6=(3^{\frac{1}{2}})^6=3^3=27$$
$$(2^{\frac{2}{3}})^6=2^4=16$$
$$(\sqrt[3]{5})^6=(5^{\frac{1}{3}})^6=5^2=25$$
$$(\sqrt[12]{4^5})^6=(4^{\frac{5}{12}})^6=4^{\frac{5}{2}}=2^5=32$$

よって, 大小関係は次のようになる.

$$2^{\frac{2}{3}}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}<\sqrt[12]{4^5}$$

(4)　真数は正であるから

$$x+5>0 \text{ かつ } 1-x>0$$

よって

$$-5<x<1 \cdots ①$$

与えられた不等式は

$$\begin{aligned}2\log_{\frac{1}{3}}(x+5) &\leqq \log_{\frac{1}{3}}(1-x)-1\\ \log_{\frac{1}{3}}(x+5)^2 &\leqq \log_{\frac{1}{3}}(1-x)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\\ \log_{\frac{1}{3}}(x+5)^2 &\leqq \log_{\frac{1}{3}}3(1-x)\end{aligned}$$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから，

$$(x+5)^2 \geqq 3(1-x)$$

この 2 次不等式を解いて

$$\begin{aligned}&x^2+13x+22 \geqq 0\\ &(x+11)(x+2) \geqq 0\\ &x \leqq -11,\ -2 \leqq x \cdots ②\end{aligned}$$

①, ②より，

$$-2 \leqq x < 1$$

(5)　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．

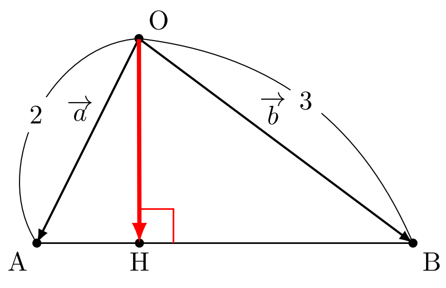
$$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$$

である．点 H は直線 AB 上の点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

と表される．$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから

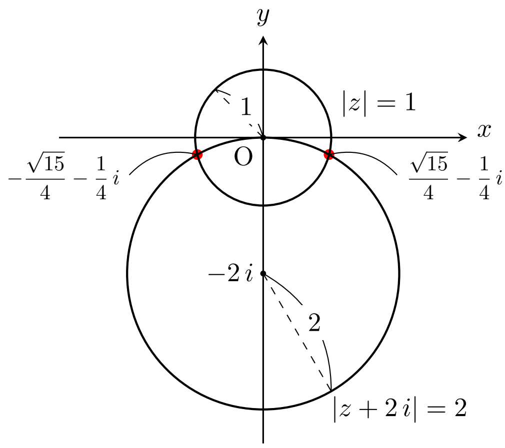
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=0\\ \left((1-t)\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)&=0\\ -(1-t)|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2+(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}&=0\\ -4(1-t)+9t+1-2t&=0\\ t&=\frac{3}{11}\end{aligned}$$



よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{8}{11}\vec{a}+\frac{3}{11}\vec{b}\\ &=\frac{8}{11}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

(6)　$z = a + bi$ (a, b は実数) とおくと, 連立方程式は次のようになる.



$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z + 2i| = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z + 2i|^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + (b+2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \cdots ① \\ a^2 + b^2 + 4b + 4 = 4 \cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入して, $4b = -1$. $b = -\frac{1}{4}$. これを①に代入して

$$a^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{15}{16}$$

$$a = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

よって, $z = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4}i,\quad -\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4}i$ である.

(補足) 複素数平面上では, 図のように, 2 つの円 $|z| = 1$, $|z + 2i| = 2$ の交点を求めている.

〔 II 〕

(1) 数列の一般項 a_n は

$$a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$$

と表されるから

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = n\,(n+2)$$

(2)　(1) より

$$\frac{1}{S_m} = \frac{1}{m(m+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+2}\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_n} \\
=&\frac{1}{2}\Bigg(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots \\
&\quad \cdots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\Bigg) \\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
=&\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

〔 III 〕

(1)　B から赤球を取り出す事象は次の 2 つの事象

① A から赤球を取り出し, B から赤球を取り出す

② A から白球を取り出し, B から赤球を取り出す

の和事象であり, これらの事象は互いに排反である.
①の確率は

$$\frac{3}{9} \times \frac{6}{8}$$

であり, ②の確率は

$$\frac{6}{9} \times \frac{5}{8}$$

である. したがって, 求める確率は

$$\frac{3}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{2}{3}$$

である.

(2)　A から球を取り出すという事象を A とし, B から球を取り出すという事象を B とし, 取り出した球が白球であるという事象を W とすると,

$$P(A) = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{2}{3}$$
$$P_A(W) = \frac{6}{9},\ P_B(W) = \frac{2}{7}$$

であるから,

$$\begin{aligned} P(W) &= P(A \cap W) + P(B \cap W) = P(A)P_A(W) + P(B)P_B(W) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{6}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{9} + \frac{4}{21} = \frac{26}{63} \end{aligned}$$

である. 求める確率は条件付き確率 $P_W(A)$ であるから,

$$P_W(A) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)} = \frac{2}{9} \div \frac{26}{63} = \frac{7}{13}$$

(3)　A の赤球の個数が初めより増えるという事象は次の 3 つの事象

① A から赤球と白球を取り出し, B から赤球を 2 個取り出す

② A から白球を 2 個取り出し, B から赤球を 2 個取り出す

③ A から白球を 2 個取り出し, B から赤球と白球を取り出す

の和事象であり, これらの事象は互いに排反である.
①の確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$$

であり, ②の確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}$$

であり, ③の確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}$$

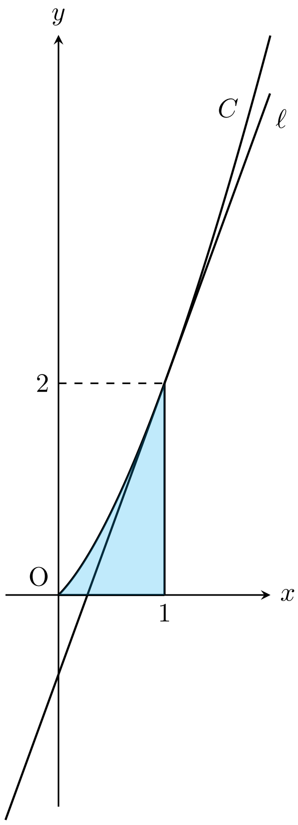
である. したがって, 求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2 \times {}_9\mathrm{C}_2}\left({}_3\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1\right) = \frac{15}{36 \times 36}\left(3 \times 6 + 10 + 5 \times 4\right) = \frac{5}{9}$$

〔 IV 〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'\sqrt{3x+1} + x \cdot \frac{(3x+1)'}{2\sqrt{3x+1}} \\ &= \sqrt{3x+1} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+1}} \\ &= \frac{9x+2}{2\sqrt{3x+1}} \end{aligned}$$



(2)　曲線 C 上の点 $(1, 2)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - 2 = f'(1)(x-1)$$

である．$f'(1) = \dfrac{9+2}{2\sqrt{3+1}} = \dfrac{11}{4}$ より

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{11}{4}(x-1) \\ y &= \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(3)　求める面積を S とすると

$$S = \int_0^1 x\sqrt{3x+1}dx$$

である．$t = \sqrt{3x+1}$（$x = \dfrac{t^2-1}{3}$）とおく．$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{3}t$ であり，$x : 0 \to 1$ のとき，$t : 1 \to 2$ であるから

$$\begin{aligned} S = \int_1^2 \left(\frac{t^2-1}{3}\right) t \cdot \frac{dx}{dt}\,dt = \int_1^2 \left(\frac{t^2-1}{3}\right) t \cdot \frac{2}{3}t\,dt &= \frac{2}{9}\int_1^2 (t^4 - t^2)\,dt \\ &= \frac{2}{9}\left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3\right]_1^2 \\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{5}(2^5 - 1^5) - \frac{1}{3}(2^3 - 1^3)\right) \\ &= \frac{116}{135} \end{aligned}$$