M－B

2022年度入学試験問題

数　　学

（９０分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子は開かないでください。

2. この問題冊子は3ページあります。試験中、ページの脱落等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
   解答用紙の汚れなどに気づいた場合も、同様に知らせてください。

3. 監督者の指示に従って、解答用紙（3枚）それぞれに受験番号、氏名を記入してください。

4. 解答は、すべて解答用紙の指定箇所に記入してください。

5. 筆記用具以外は、使用しないでください。

6. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

2022 年度入学試験問題

数　　学

（９０分）

問題は次のページです

〔 I 〕　この問題については，解答用紙の所定の欄に答えだけを書きなさい．

(1)　関数 $f(x)=2\sin^2 x-\cos^2 2x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値と，最大値をとるときの x の値を求めなさい．

(2)　2^{2022} の桁数と最高位の数字を求めなさい．
ただし，$\log_{10} 2=0.3010$ とする．

(3)　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1=a, \quad a_n=\frac{9a_{n-1}-10}{a_{n-1}+2} \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

数列 $\{a_n\}$ が公差 0 の等差数列であるような定数 a の値をすべて求めなさい．

(4)　$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-i}\right)^{2022}$ を計算しなさい．ただし，i は虚数単位とする．

〔 II 〕　1 枚の硬貨を 5 回続けて投げる．n 回目に表が出たら $a_n = 1$, 裏が出たら $a_n = 0$ とし，

$$a = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \frac{a_4}{16} + \frac{a_5}{32}$$

とする．さらに，$b_n = |\,a_n - a_{n+1}\,|\ \ (1 \leqq n \leqq 4)$ とし，

$$b = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{8} + \frac{b_4}{16}$$

とする．

(1)　1 回目, 2 回目, 3 回目に表が出て, 4 回目, 5 回目に裏が出たときの a, b それぞれの値を求めなさい．

(2)　$\dfrac{7}{32} \leqq a \leqq \dfrac{1}{4}$ となる確率を求めなさい．

(3)　表がちょうど 2 回出て，かつ $16b$ を 4 で割った余りが 1 である確率を求めなさい．

〔 III 〕　原点を O とする座標平面上に点 P (a, b), 点 Q $(5a - b, -a + 5b)$ があり，点 P は点 O を中心とする半径 1 の円周上を動く．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が平行であるときの点 P の座標を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が垂直にならないことを示しなさい．

〔 IV 〕　a は正の定数とする．関数 $f(x) = \dfrac{ax-3}{x^2} - 4\ (x > 0)$ は極大値 $\dfrac{4}{3}$ をとる．

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を求めなさい．

(2)　定数 a の値を求めなさい．

(3)　関数 $y = f(x)$ の増減，グラフの凹凸の表を作成し，それをもとにグラフの概形を描きなさい．

〔 V 〕　θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．座標平面の原点を O とし，点 $(0, 1)$ を A とする．楕円 C : $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ と直線 $y = \dfrac{\tan\theta}{2}x$ の交点のうち，第 1 象限にあるものを B とする．点 A と点 B を結ぶ楕円 C の一部のうち，短い方を C' とする．

(1)　点 B の座標を θ で表しなさい．

(2)　線分 OA, OB および C' で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい．