M-総合型 解答

〔 I 〕

(1) 50 を 3 で割った余りは 2 であるから, $a_{50} = 2$. □

(2)

$$a_k = \begin{cases} 1 & (k = 3m+1 \text{ のとき}) \\ 2 & (k = 3m+2 \text{ のとき}) \\ 0 & (k = 3m \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} a_k &= \sum_{m=0}^{16} a_{3m+1} + \sum_{m=0}^{16} a_{3m+2} + \sum_{m=1}^{16} a_{3m} \\ &= \sum_{m=0}^{16} 1 + \sum_{m=0}^{16} 2 + \sum_{m=1}^{16} 0 \\ &= 17 + 2 \cdot 17 = 51 \end{aligned}$$

□

(3) 上の a_n の場合分けの計算より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} ka_k &= \sum_{m=0}^{16} (3m+1)a_{3m+1} + \sum_{m=0}^{16} (3m+2)a_{3m+2} + \sum_{m=1}^{16} 3ma_{3m} \\ &= \sum_{m=0}^{16} (3m+1) + \sum_{m=0}^{16} 2(3m+2) \\ &= \sum_{m=0}^{16} (9m+5) \\ &= 9 \cdot \frac{16(16+1)}{2} + 5 \cdot 17 = 1309 \end{aligned}$$

□

〔 II 〕

(1) 最頻値は人数が一番多い得点だから, 20 点である. □

(2) 平均値は

$$\frac{20\times10+30\times4+40\times2+50\times4+60\times3+70\times2+80\times2+90\times2}{30}=42\text{ 点}.$$

□

(3) 分散は

$$\frac{20^2\times10+30^2\times4+40^2\times2+50^2\times4+60^2\times3+70^2\times2+80^2\times2+90^2\times2}{30}-42^2$$

$$=\frac{10(40+36+32+100+108+98+128+162)}{3}-1764$$

$$=\frac{7040}{3}-1764=582.6...$$

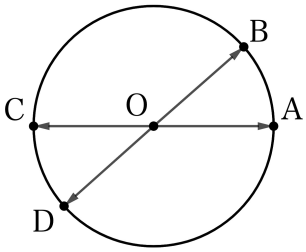
だから, 583. □

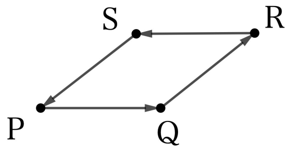
〔 III 〕

(1) PQRS がひし形であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{RS}} = -\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{QR}} = -\overrightarrow{\mathrm{SP}} = -\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

よって AC, BD は円の直径となるので,
四角形 ABCD は長方形である. □





(2) △ABC と △ACD は AC を斜辺とする直角三角形であるから,

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 + \mathrm{DA}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

□

(3) $\angle\mathrm{AOB} = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ とすると △OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$$

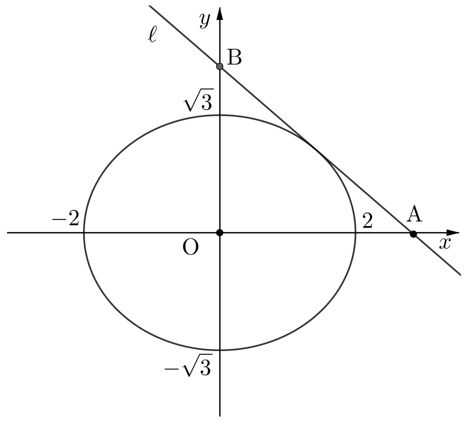
同様に $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ より, △OBC, △OCD, △ODA の面積はすべて $\dfrac{1}{2}\sin\alpha$ である. よって, 四角形 ABCD の面積 $S(\alpha)$ は

$$S(\alpha) = 2\sin\alpha$$

$0 < \alpha < \pi$ であるから, $0 < \sin\alpha \leqq 1$ より, $S(\alpha)$ は $\sin\alpha = 1$ のとき, すなわち $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 2 をとる. □

〔 IV 〕

(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (p,q) での接線 ℓ の方程式は



$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$$

であるから, 楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点 $\left(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ における接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}x}{4}+\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{y}{3}=1\\&3\sqrt{2}x+2\sqrt{6}y=12\\&y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{6}\end{aligned}$$

である.

接線 ℓ と x 軸, y 軸の交点 A, B の座標は $\mathrm{A}(2\sqrt{2},0)$, $\mathrm{B}(0,\sqrt{6})$ であるから

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{14}$$

であり,

$$\cos\angle\mathrm{OAB}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

□

(2) $f(x)=x^x>0$ より,

$$\log f(x)=x\log x$$

なので, 両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\log x+1$$

よって,

$$f'(x)=f(x)(\log x+1)=x^x(\log x+1)$$

$$\begin{aligned}f'(x)=0&\iff \log x=-1\\&\iff x=e^{-1}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

である. また, $0<x<e^{-1}$ のとき $f'(x)<0$, $x>e^{-1}$ のとき $f'(x)>0$ である.

x		e^{-1}	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$

よって, $f(x)$ は $x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ で, 極小値 $e^{-\frac{1}{e}}$ を持つ.　□

(3) $a\neq 0,\alpha\neq\beta$ より, $\alpha'-\beta'=(a\alpha+b)-(a\beta+b)=a(\alpha-\beta)\neq 0$ が成り立つので A' と B' は異なる点であり, 同様に A', B', C' は相異なる.

$\angle\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ は $\dfrac{\gamma'-\beta'}{\alpha'-\beta'}$ の偏角であり,

$$\frac{\gamma'-\beta'}{\alpha'-\beta'}=\frac{(a\gamma+b)-(a\beta+b)}{(a\alpha+b)-(a\beta+b)}=\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$$

が成り立つから, $\dfrac{\gamma'-\beta'}{\alpha'-\beta'}$ の偏角は $\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$ の偏角, すなわち $\angle\mathrm{ABC}$ と一致する.　□