2023 年度一般選抜 A 日程（大学入学共通テスト併用型） 解答例

〔 I 〕 (1) $-x+5$

(2) 初項 4, 公比 -3

（複素数の範囲での解答

初項, 公比は $4, -3$ または $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i, \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$ または $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i, \frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$

も正解）

(3) $x=\dfrac{e-1}{2}$

(4) $y'=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

〔 II 〕 (1) 奇数の目が 3 回, あるいは, 奇数の目が 1 回と偶数の目が 2 回出る場合を考えて, $3^3+{}_3C_1\cdot 3\cdot 3^2=108$ 通り.

(2) 目の出方は全部で $6^3=216$ 通り. 出る目の積が奇数となるのは奇数の目が 3 回出る場合で $3^3=27$ 通りあり, その余事象だから $216-27=189$ 通り.

(3) 出る目の最小値を m とすると, 最大値は $m+3$ で, $1 \leqq m < m+3 \leqq 6$ だから, m のとり得る値は 1,2,3 の 3 通り.

出る目が $\{m, m, m+3\}$ の組み合わせとなるのは, m が出るさいころの選び方を考えて ${}_3C_2$ 通り. 同様に, $\{m, m+1, m+3\}$ あるいは $\{m, m+2, m+3\}$ となるのはそれぞれ $3!$ 通りで, $\{m, m+3, m+3\}$ となるのは ${}_3C_2$ 通り.

これらを合わせて, $3({}_3C_2+3!\cdot 2+{}_3C_2)=3(3+12+3)=54$ 通り.

〔 III 〕 (1) (a) $\triangle$ABC に余弦定理を用いると,

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\cos\angle\mathrm{B}=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=17.$$

$\mathrm{AC}>0$ なので, $\mathrm{AC}=\sqrt{17}$.

(b) 四角形 ABCD は円に内接しているから, $\cos\angle\mathrm{D}=\cos(180^\circ-\angle\mathrm{B})=\dfrac{1}{3}$.

$\mathrm{DA}=x$ として, $\triangle$ACD に余弦定理を用いると

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{CD}^2+x^2-2\cdot\mathrm{CD}\cdot x\cdot\cos\angle\mathrm{D}.$$

ゆえに, $17=16+x^2-\dfrac{8}{3}x$ を解いて, $3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)=0$ より, $x>0$ なので $\mathrm{DA}=3$.

四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{B}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\cdot\sin\angle\mathrm{D}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=6\sqrt{2}.$$

(2) (a)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\,5,\,4) - (1,\,1,\,2) = (-2,\,4,\,2)$ より, 直線 AB 上の点の位置ベクトルは実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1-2t,\,1+4t,\,2+2t) \quad \cdots \text{(i)}$$

と書ける.

$$1-2t=m, \quad 1+4t=n, \quad 2+2t=6$$

を解くと, 第 3 式から $t=2$ で, $m = 1-2\cdot 2 = -3$, $n = 1+4\cdot 2 = 9$.

(b)　点 P は xy 平面上にあるので, (i) において z 成分が 0 だから $2+2t=0$ より, $t=-1$. これを (i) に代入して, $\mathrm{P}(3,\,-3,\,0)$.

同様に, 点 Q は x 成分が 0 で, 点 R は y 成分が 0 だから, (i) で $1-2t=0$ と $1+4t=0$, つまり, $t=\dfrac{1}{2}$ と $t=-\dfrac{1}{4}$ の場合を考えて, $\mathrm{Q}(0,\,3,\,3)$, $\mathrm{R}\left(\frac{3}{2},\,0,\,\frac{3}{2}\right)$.

以上より,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (-3,\,6,\,3), \quad \overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\tfrac{3}{2},\,-3,\,-\tfrac{3}{2}\right)$$

であるから, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -2\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ が成り立つ.

〔 IV 〕 (1)　$z = 1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(2)　ド・モアブルの公式から $z^6 = 2^6(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 64$.

(3)　$z-1=\sqrt{3}\,i$ であるから, $(z-1)^2=-3$, すなわち, $z^2-2z+4=0$. ここで, $z^5+2z^4+5z^3+8z^2+16z-10$ を z^2-2z+4 で割ると, 商が $z^3+4z^2+9z+10$, 余りが -50 となる. したがって,

$$z^5+2z^4+5z^3+8z^2+16z-10 = (z^3+4z^2+9z+10)(z^2-2z+4)-50 = -50.$$

(4)　$z^2 = -2+2\sqrt{3}i$ に注意すると,

$$\frac{z-z^2}{-2-z^2} = \frac{1+\sqrt{3}i-(-2+2\sqrt{3}i)}{-2-(-2+2\sqrt{3}i)} = \frac{3-\sqrt{3}i}{-2\sqrt{3}i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

より, $\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{3}$.

〔 V 〕 (1)　$\cos 4x$ と $\cos^2 x$ はそれぞれ

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2t^2-1, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{t+1}{2}$$

と表せるので, $f(x) = 4(2t^2-1) - 12\cdot\dfrac{t+1}{2} + 5 = 8t^2-6t-5$.

(2)　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき, $-1 \leqq t = \cos 2x \leqq 1$. この範囲で, t についての不等式 $f(x) = 8t^2-6t-5 = (2t+1)(4t-5) \geqq 0$ を解くと, $t = \cos 2x \leqq -\dfrac{1}{2}$. したがって, $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で解を求めて, $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$.

(3) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \{4\cos 4x - 6(1+\cos 2x)+5\}dx = \Big[\sin 4x - 3\sin 2x - x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2}{3}\pi - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$