M—A 2

2023 年度入学試験問題

数　　学

（90 分）

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子は開かないでください。
2. この問題冊子は 4 ページあります。試験中，ページの脱落等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
   解答用紙（マークシート）の汚れなどに気づいた場合も，同様に知らせてください。
3. 解答用紙（マークシート）は折り曲げたり，汚したりしないでください。
4. 解答は，すべて解答用紙（マークシート）に記入し，解答用紙（マークシート）の枠外には，なにも書かないでください。
5. **試験問題は問題記号ア～ワで 44 問あります。**
   解答用紙（マークシート）には，問題記号がア～ンまで印刷されています。解答にあたっては，問題記号ア～ワの範囲内で該当する解答欄に解答してください。
6. 解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読んでください。**ただし，問題冊子を開いてはいけません。**
7. マークは必ず HB の黒鉛筆を使用し，訂正する場合は，完全に消してからマークしてください。
8. 監督者の指示に従って，解答用紙（マークシート）に解答する科目，受験番号をマークするとともに，受験番号，氏名を記入してください。
9. 解答する科目，受験番号，解答が正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。
10. 筆記用具以外は，使用しないでください。
11. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔 I 〕

⑴ $\dfrac{5}{2+i} = \boxed{\quad ア \quad} + \boxed{\quad イ \quad}\,i$ （ただし，i は虚数単位とする.）

⑵ 連立不等式

$$\begin{cases} 2x^2 - 50 < 0 \\ x^2 + 12x + 11 > 0 \end{cases}$$

の解は $\boxed{\quad ウ \quad} < x < \boxed{\quad エ \quad}$ である.

⑶ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$ の解のうち最大のものは

$\theta = \dfrac{\boxed{\quad オ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}}\pi$ である.

⑷ $2023^{2.4}$ の整数部分は $\boxed{\quad キ \quad}$ 桁の数である．ただし，$\log_{10} 7 = 0.845$, $\log_{10} 17 = 1.230$ とする.

〔Ⅱ〕

(1) 男子5人と女子3人がいる．

(a) 8人を円卓のまわりに等間隔に着席させるとき，女子3人が隣り合う確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

(b) 8人を円卓のまわりに等間隔に着席させるとき，女子2人が向かい合う確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．

(c) 8人の中から6人を選んで円卓のまわりに等間隔に着席させるとき，女子2人が向かい合う確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である．

(2) a を定数とし，中心が $(2,\ -1)$ の円 $C : x^2 + y^2 + ax + 2y = 0$ を考える．

(a) 円 C の半径は $\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ である．

(b) 円 C と直線 $y = -2x - 1$ の交点のうち，x 座標が正であるものの座標は $\left(\boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}}\right)$ である．

(c) 点 $(x,\ y)$ が円 C 上を動くとき，$-2|x| + y$ の最小値は $\boxed{\text{チ}}$ である．

〔Ⅲ〕

(1) 座標空間の3点 A(0, 0, 8), B(1, 3, 0), C(2, 4, 2)を考える．直線 BC 上の点で，点 A から最も近い点を P とする．

(a) 直線 BC 上の点の座標は実数 t を用いて

$$\left(1+t,\ 3+\boxed{\text{ツ}}\,t,\ \boxed{\text{テ}}\,t\right)$$

と表される．

(b) 点 P の座標は $\left(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}},\ \boxed{\text{ニ}}\right)$ である．

(c) △ABP の面積は $\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$ である．

(2) a, b を実数とし，$b \neq 2$ とする．関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x - 1$ が $x = b$ と $x = 2$ で極値をとるとする．

(a) $a = \boxed{\text{ノ}}$

(b) 関数 $f(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である．

(c) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = f(2)$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ である．

〔Ⅳ〕

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}-n}=\boxed{\text{ホ}}$

(2)

(a) $z\neq 1$ を満たすすべての複素数 z に対して，

$$1+z+z^2+z^3+z^4=\frac{1-z^{\boxed{\text{マ}}}}{1-z}$$

が成り立つ．また，$z\neq 0$ のとき，$t=z+\dfrac{1}{z}$ とおくと，

$$\frac{1+z+z^2+z^3+z^4}{z^2}=\boxed{\text{ミ}}\,t^2+\boxed{\text{ム}}\,t+\boxed{\text{メ}}$$

と表される．

(b) i を虚数単位とし，$w=\cos\dfrac{2}{5}\pi+i\sin\dfrac{2}{5}\pi$ とする．

$$w^5=\boxed{\text{モ}},\quad w+\frac{1}{w}=\boxed{\text{ヤ}}\cos\frac{2}{5}\pi$$

であるから，(a) より

$$\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{\boxed{\text{ユ}}+\sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}}{4}$$

であることがわかる．

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-16x+57}{x-4}$ とする．

(a) 関数 $f(x)$ は，$x=\boxed{\text{ラ}}$ で極大になり，$x=\boxed{\text{リ}}$ で極小になる．

(b) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\frac{x^2}{\boxed{\text{ル}}}+\boxed{\text{レ}}\,x+\log\left|x+\boxed{\text{ロ}}\right|^{\boxed{\text{ワ}}}+C$

（C は積分定数）