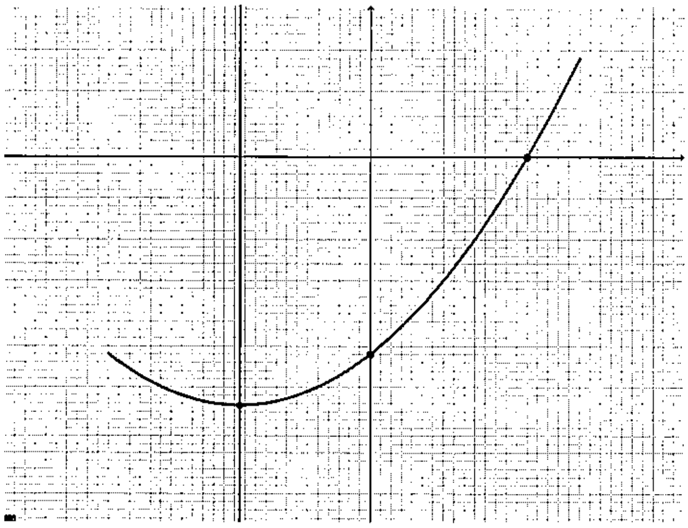
解答

〔 I 〕 (1) $y=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{121}{4}$ より, 頂点の座標は $\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{121}{4}\right)$, x 軸との交点の座標は $(3,0)$, y 軸との交点の座標は $(0,-24)$ である.

(2) 最大値は $x=4$ のとき $f(4)=12$ であり, 最小値は $x=-\dfrac{5}{2}$ のとき $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{121}{4}$ である.



(3) $f(-5)=-24$, $f(4)=12$ より, $(-5,-f(-5))$ と $(4,f(4))$ を結んだ直線の方程式は, $y=4x-4$ である. よって求める面積は,

$$\int_{-5}^{4}\left\{4x-4-(x^2+5x-24)\right\}dx=-\int_{-5}^{4}(x+5)(x-4)dx=\frac{1}{6}\left\{4-(-5)\right\}^3=\frac{243}{2}.$$

〔 II 〕

$$\begin{aligned}37&=17\times2+3\\17&=3\times5+1\\3&=2\times1+1\\2&=1\times2\end{aligned}$$

である. ユークリッドの互除法より, 37 と 17 の最大公約数 $g=1$.
また,

$$\begin{aligned}1&=3-2\times1\\&=3-(17-3\times5)\\&=(1+5)\times3-17\\&=6\times(37-2\times17)-17\\&=6\times37-13\times17\end{aligned}$$

となるので, $(x_0,y_0)=(6,-13)$ が特殊解である. よって一般解は, 整数 k を用いて $(x,y)=(6+17k,-13-37k)$ と表される.

〔 III 〕 (1) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2t^2 - 1.$

(2)

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(2\theta+\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta}{\sin\theta} = 2\cos^2\theta + \cos 2\theta = 2t^2 + 2t^2 - 1$$
$$= 4t^2 - 1.$$

(3)

$$\begin{aligned}\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= (2t^2-1)t - 2(1-t^2)t \\ &= 4t^3 - 3t.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(3\theta+\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin 3\theta\cos\theta + \cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta} &= \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta + \cos 3\theta \\ &= (4t^2-1)t + 4t^3 - 3t \\ &= 8t^3 - 4t.\end{aligned}$$

〔 IV 〕 $y' = \dfrac{-2\sin 2x}{\cos 2x}$ より, $y'' = \dfrac{-4\cos^2 2x - 4\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \dfrac{-4}{\cos^2 2x}.$

〔 V 〕 (1) $4-5i$ より, 実部は 4, 虚部は -5.

(2) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$. よって $z^n = (\sqrt{3})^n\left(\cos\dfrac{5n\pi}{6} + i\sin\dfrac{5n\pi}{6}\right)$ より, 実数となる最小の n は 6.