解答

〔 I 〕 (1) $P(x) = (x-2)(x+3)Q(x) + 2x - 1$ とおける．$P(2) = 8 + 4a + 2b - 7 = 3$, $P(-3) = -27 + 9a - 3b - 7 = -7$ より, $a = 2$, $b = -3$.

(2) $x^{1/2} - x^{-1/2} = -2$ の両辺を二乗すると, $x - 2 + x^{-1} = 4$ より $x + x^{-1} = 6$. さらにこの両辺を二乗すると, $x^2 + 2 + x^{-2} = 36$ より, $x^2 + x^{-2} = 34$.

(3) 3 の倍数となる組み合わせは, $(0,1,2)$, $(0,2,4)$, $(1,2,3)$, $(2,3,4)$ である．$(0,1,2)$ と $(0,2,4)$ は 4 通りずつ, $(1,2,3)$ と $(2,3,4)$ は 6 通りずつあるので, 20 個ある．

(4) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3} = t$ とおくと, $\dfrac{5}{6}\pi \leqq x \leqq 2\pi$ より, $\dfrac{3}{4}\pi \leqq t \leqq \dfrac{4}{3}\pi$ である．$-1 \leqq \cos t \leqq -\dfrac{1}{2}$ より, $-4 \leqq \dfrac{2}{\cos t} \leqq -2$ である．$y = -2$ となるのは $\cos t = -1$ のときであり, $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \pi$ より, $x = \dfrac{4}{3}\pi$.

〔 II 〕 (1) $a_1 = \dfrac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{1}{3}$, $a_2 = \dfrac{6}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{1}{4}$, $a_3 = \dfrac{10}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \dfrac{1}{6}$ より, $S_3 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{4}$.

(2) (右辺) $= -\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) + 5\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{-1}{n(n+1)} + \dfrac{5}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2(2n-1)}{n(n+1)(n+2)} =$ (左辺).

(3) (2) より,

$$S_n = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + 5\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$
$$= -\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + 5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n(3n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

である．$S_n > \dfrac{7}{6}$ を整理すると, $n^2 - 9n - 7 > 0$ となり, $n = 9$ では $-7 \not> 0$, $n = 10$ では $3 > 0$ であるため, $S_n > \dfrac{7}{6}$ を満たす最小の自然数 n は 10 である $\left(S_{10} = \dfrac{155}{132} > \dfrac{154}{132} = \dfrac{7}{6}\right)$.

〔 III 〕 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG_1}} = \overrightarrow{\mathrm{PG_2}} = \overrightarrow{\mathrm{QG_3}}$ より,
$\overrightarrow{\mathrm{OG_1}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$,
$\overrightarrow{\mathrm{OG_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PG_2}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OG_1}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$,
$\overrightarrow{\mathrm{OG_3}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QG_3}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OG_1}} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

(3) (2) より, $\overrightarrow{\mathrm{OG_4}} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OG_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OG_2}} + \overrightarrow{\mathrm{OG_3}}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OG}}$.

〔 IV 〕 (1) $z=-1+i$ を与えられた方程式に代入すると,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{-1+i}{-1+i-2i} = \frac{-1+i}{-1-i} \\ &= \frac{(-1+i)^2}{(-1-i)(-1+i)} \\ &= \frac{1-2i-1}{1+1} \\ &= \frac{-2i}{2} \\ &= -i\end{aligned}$$

よって, $t=-1$.

(2) $z \neq 2i$ のとき, $z=x+yi$ を与えられた方程式に代入して整理すると,

$$\begin{aligned}\frac{x+yi}{x+yi-2i} &= it \\ x+yi &= (x+yi-2i)it \\ x+yi &= -(y-2)t+xti\end{aligned}$$

より $x=-(y-2)t$, $y=xt$ を得る.
$x \neq 0$ のとき, $t=\dfrac{y}{x}$ より t を消去すると,

$$\begin{aligned}x^2 &= -y(y-2) \\ x^2+y(y-2) &= 0 \\ x^2+y^2-2y+1 &= 1 \\ x^2+(y-1)^2 &= 1\end{aligned}$$

となる. $x=0$ のとき, $y=0$ となる $(t=0)$. 以上より, z は点 i を中心とする半径 1 の円を描く. ただし, 点 $2i$ を除く.

〔 V 〕 (1) $f'(x)=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

(2) $f(\log 2)=\dfrac{3}{5}$, $f'(\log 2)=\dfrac{16}{25}$ より, 接線の方程式は

$$y=\frac{16}{25}(x-\log 2)+\frac{3}{5}.$$

(3)

$$\begin{aligned}S(k)=\int_0^k f(x)dx=\int_0^k \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx &= \left[\log(e^x+e^{-x})\right]_0^k \\ &= \log(e^k+e^{-k})-\log 2.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{S(k)}{k} &= \lim_{k\to\infty}\frac{\log(e^k+e^{-k})-\log 2}{k} \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{\log e^k(1+e^{-2k})-\log 2}{k} \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{k+\log(1+e^{-2k})-\log 2}{k} \\ &= 1.\end{aligned}$$