M-B 解答

〔 I 〕

(1)　関数の式を変形して

$$\begin{aligned} y &= x^2-4ax+6a^2-a+14 \\ &= (x-2a)^2-4a^2+6a^2-a+14 \\ &= (x-2a)^2+2a^2-a+14 \end{aligned}$$

よって, 頂点は $(2a, 2a^2-a+14)$. 与えられた 2 次関数のグラフを x 軸方向に 5, y 軸方向に -7 だけ平行移動すると, 頂点は $(2a+5, 2a^2-a+7)$ となる. これが直線 $y=2x$ 上にあるとき,

$$\begin{aligned} 2a^2-a+7 &= 2(2a+5) \\ 2a^2-5a-3 &= 0 \\ (2a+1)(a-3) &= 0 \end{aligned}$$

である. よって, $a=-\dfrac{1}{2},\ 3$.

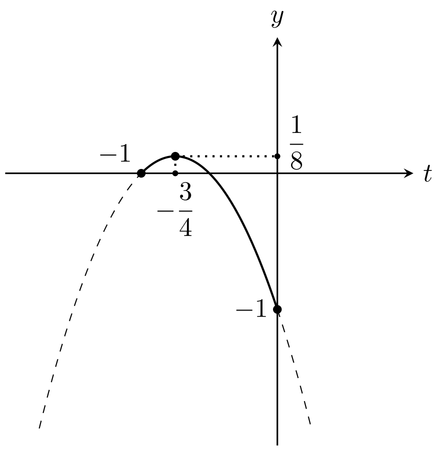
(答)　$a=-\dfrac{1}{2},\ 3$　□

(2)　2 倍角の公式を用いると,

$$\begin{aligned} y &= \cos 2x-3\sin x-2 \\ &= 1-2\sin^2 x-3\sin x-2 \\ &= -2\sin^2 x-3\sin x-1 \end{aligned}$$

$t=\sin x$ とおくと, $-1 \leqq t \leqq 0$.

$$\begin{aligned} y &= -2t^2-3t-1 \\ &= -2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8} \end{aligned}$$



よって, 最大値は $\dfrac{1}{8}$ $\left(t=-\dfrac{3}{4}\text{ のとき}\right)$,
最小値は -1 ($t=0$ のとき).

(答)　最大値 $\dfrac{1}{8}$, 最小値 -1.　□

(3)　$2^x+2^{-x}=3$ より

$$\begin{aligned} (2^x+2^{-x})^2 &= 3^2 \\ (2^x)^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+(2^{-x})^2 &= 9 \\ 4^x+2+4^{-x} &= 9 \\ 4^x+4^{-x} &= 7 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{16^x - 16^{-x}}{2^x - 2^{-x}} &= \frac{(4^x + 4^{-x})(4^x - 4^{-x})}{2^x - 2^{-x}} \\
&= \frac{(4^x + 4^{-x})(2^x + 2^{-x})(2^x - 2^{-x})}{2^x - 2^{-x}} \\
&= (4^x + 4^{-x})(2^x + 2^{-x}) \\
&= 7 \cdot 3 \\
&= 21
\end{aligned}
$$

(答)　21 $\square$

(4)　$\log_3(x-1)$ と $\log_{\frac{1}{3}}(3-x)$ の真数条件より

$$x - 1 > 0 \text{ かつ } 3 - x > 0$$
$$1 < x < 3$$

不等式を変形すると

$$
\begin{aligned}
2\log_3(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(3-x) &\geqq 0 \\
\log_3(x-1)^2 + \frac{\log_3(3-x)}{\log_3 \frac{1}{3}} &\geqq 0 \\
\log_3(x-1)^2 + \frac{\log_3(3-x)}{\log_3 3^{-1}} &\geqq 0 \\
\log_3(x-1)^2 - \log_3(3-x) &\geqq 0 \\
\log_3(x-1)^2 &\geqq \log_3(3-x)
\end{aligned}
$$

$\log_3 X$ は単調増加関数なので

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 &\geqq 3 - x \\
x^2 - x - 2 &\geqq 0 \\
(x+1)(x-2) &\geqq 0 \\
x \leqq -1,\ 2 &\leqq x
\end{aligned}
$$

真数条件と合わせて, 解は

$$2 \leqq x < 3$$

となる.

(答)　$2 \leqq x < 3$ $\square$

(5)　点 $(2,3)$ を通り, $\overrightarrow{n} = (4,1)$ を法線ベクトルとする直線の方程式は

$$4(x-2) + 1(y-3) = 0$$

である. これを整理して, $4x + y - 11 = 0$ となる.

(答)　$4x + y - 11 = 0$ $\square$

(6)

$$2024 = 6 \cdot 337 + 2$$

であるから,

$$\alpha^{2024} = \left(\alpha^6\right)^{337} \cdot \alpha^2 = \alpha^2$$

ここで, α は 1 の 6 乗根で実部, 虚部ともに正のものであるから,

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

したがって,

$$\alpha^{2024} = \alpha^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

(答)　$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

□

〔 II 〕

(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項を a, 公差を d とすると,

$$a_3 = a + (3-1)d = a + 2d = -4$$
$$a_9 = a + (9-1)d = a + 8d = 5$$

であるから, これを解いて, $a = -7$, $d = \dfrac{3}{2}$.
よって, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = -7 + (n-1)\cdot\frac{3}{2}$$
$$a_n = \frac{3}{2}n - \frac{17}{2}$$

□

(2)

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{1}{2}n\left(-7 + \frac{3}{2}n - \frac{17}{2}\right) = \frac{3}{4}n^2 - \frac{31}{4}n$$

$S_n > 0$ より,

$$\frac{3}{4}n^2 - \frac{31}{4}n > 0$$
$$n(3n-31) > 0$$

$n > 0$ なので, $n > \dfrac{31}{3}$ を満たす最小の自然数は 11 である.　□

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} S_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}k^2 - \frac{31}{4}k\right)\\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{31}{4}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)(n-15)}{4}\\ &= \frac{1}{4}n^3 - \frac{7}{2}n^2 - \frac{15}{4}n\end{aligned}$$

□

〔 III 〕

(1)　$a > b$ である場合の数は, 1 から 9 までの整数から 2 枚を選ぶ組合せの数に等しいので

$${}_9\mathrm{C}_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 \text{（通り）}$$

である．同様に $c > d$ である場合の数も 36（通り）であるので, $a > b$ かつ $c > d$ である場合の数は

$$36 \times 36 = 36^2 \text{（通り）}$$

である．袋の中の 9 枚のカードから 1 枚を取り出して袋に戻す試行を 4 回繰り返すときの全体の場合の数は 9^4（通り）である．よって, 求める確率は

$$\frac{36^2}{9^4} = \frac{16}{81}$$

である．□

(2)　$(a-b) \times (c-d)$ が偶数となる事象は, $(a-b) \times (c-d)$ が奇数となる事象の余事象である．そして, $(a-b) \times (c-d)$ が奇数となるのは, $a-b$, $c-d$ が両方とも奇数となるときである．

$a-b$ が奇数となるのは, $(a, b) = (\text{偶数}, \text{奇数})$ または $(\text{奇数}, \text{偶数})$ のときであるから, その場合の数は

$$4 \times 5 + 5 \times 4 = 40 \text{（通り）}$$

である．同様に, $c-d$ が奇数となる場合の数は 40（通り）であるので, $(a-b) \times (c-d)$ が奇数となる場合の数は

$$40 \times 40 = 40^2 \text{（通り）}$$

である．

$(a-b) \times (c-d)$ が偶数となる事象は, $(a-b) \times (c-d)$ が奇数となる事象の余事象であるので, その場合の数は

$$9^4 - 40^2 \text{（通り）}$$

である．よって, $(a-b) \times (c-d)$ が偶数となる確率は

$$\frac{9^4 - 40^2}{9^4} = \frac{6561 - 1600}{6561} = \frac{4961}{6561}$$

である．□

(3)　$a > b$ かつ $c > d$ である事象を X とし, $(a-b) \times (c-d)$ が偶数である事象を Y とすると, $a > b$ かつ $c > d$ であるとき, $(a-b) \times (c-d)$ が偶数である条件付き確率 $P_X(Y)$ は

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$$

である．

(1) より $P(X) = \dfrac{16}{81}$ である．

事象 X（$a > b$ かつ $c > d$ である）場合の数は (1) より 36^2（通り）である．事象 $X \cap \overline{Y}$（$a > b$ かつ $c > d$ であり, かつ $(a-b) \times (c-d)$ が奇数（$a-b$ と $c-d$ がともに奇数）である事象）を考える．$a > b$ かつ $a-b$ が奇数となるのは

$$\begin{aligned}(a, b) =&(2, 1),\ (3, 2),\ (4, 1),\ (4, 3),\ (5, 2),\ (5, 4),\ (6, 1),\ (6, 3),\ (6, 5),\ (7, 2),\ (7, 4),\ (7, 6)\\ &(8, 1),\ (8, 3),\ (8, 5),\ (8, 7),\ (9, 2),\ (9, 4),\ (9, 6),\ (9, 8)\end{aligned}$$

の 20（通り）である．同様に, $c > d$ かつ $c-d$ が奇数となるのは 20（通り）である．よって, 事象 $X \cap \overline{Y}$ の場合の数は $20 \times 20 = 20^2$（通り）である．

事象 $X \cap Y$（$a > b$ かつ $c > d$ であり，かつ $(a-b)\times(c-d)$ が偶数である事象）と事象 $X \cap \overline{Y}$ は排反であるから，事象 X（$a > b$ かつ $c > d$ である）が起こる場合の数 36^2（通り）のうち，事象 $X \cap Y$ が起こる場合の数は

$$36^2 - 20^2 = (36+20)(36-20) = 56 \times 16 \text{（通り）}$$

である．よって，事象 $X \cap Y$ が起こる確率 $P(X \cap Y)$ は

$$P(X \cap Y) = \frac{56 \times 16}{9^4}$$

である．ゆえに，求める条件付き確率 $P_X(Y)$ は

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{56\times16}{9^4}}{\frac{16}{81}} = \frac{56}{81}$$

である． $\square$

〔 IV 〕

(1) 点 A$(3,1)$ を通る直線 ℓ の方程式は次の通りである.

$$y = t\,(x-3)+1$$
$$y = tx - 3t + 1$$

□

(2)　直線 ℓ と x 軸が交わる点 P の座標は $\left(\dfrac{3t-1}{t}, 0\right)$ である. 直線 ℓ と y 軸が交わる点 Q の座標は $(0, -3t+1)$ である. よって, △OPQ の面積は t の関数として,

$$f(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3t-1}{t}(-3t+1) = \frac{1}{2}\left(-9t+6-\frac{1}{t}\right)$$

で与えられる.

□

(3)　関数 $f(t)$ を t に関して微分すると,

$$f'(t) = -\frac{1}{2}\left(9-\frac{1}{t^2}\right) = -\frac{(3t-1)(3t+1)}{2t^2}$$

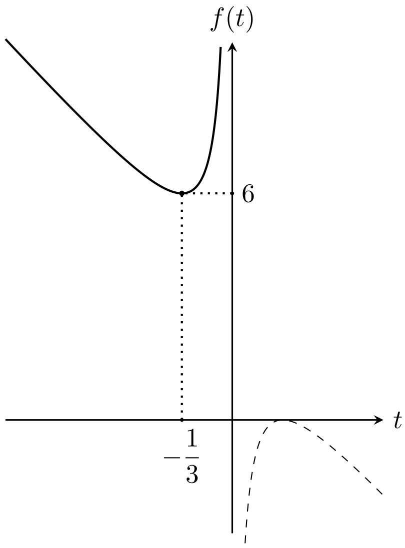
である. よって, 増減表は以下のようになる.

t		$-\dfrac{1}{3}$		0
$f'(t)$	$-$	0	$+$	定義されない
$f'(t)$	↘	6	↗	定義されない

したがって, $t = -\dfrac{1}{3}$ のとき, 面積 $f(t)$ は最小値

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 6$$

をとる.



□