M－B

2024 年度入学試験問題

数　　学

（９０分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子は開かないでください。

2. この問題冊子は2ページあります。試験中、ページの脱落等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
   解答用紙の汚れなどに気づいた場合も、同様に知らせてください。

3. 監督者の指示に従って、解答用紙（4枚）それぞれに受験番号、氏名を記入してください。

4. 解答は、すべて解答用紙の指定箇所に記入してください。

5. 筆記用具以外は、使用しないでください。

6. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

〔 I 〕

(1)　a は定数とする．2 次関数 $y = x^2 - 4ax + 6a^2 - a + 14$ のグラフを x 軸方向に 5, y 軸方向に -7 だけ平行移動して得られるグラフの頂点が, 直線 $y = 2x$ 上にあるような a の値をすべて求めなさい.

(2)　$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき, 関数 $y = \cos 2x - 3\sin x - 2$ の最大値と最小値を求めなさい.

(3)　$2^x + 2^{-x} = 3$ のとき, $\dfrac{16^x - 16^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$ の値を求めなさい.

(4)　不等式 $2\log_3(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(3-x) \geqq 0$ を解きなさい.

(5)　点 $(2, 3)$ を通り, $\overrightarrow{n} = (4, 1)$ を法線ベクトルとする直線の方程式を求めなさい.

(6)　方程式 $z^6 = 1$ の解であって, 実部, 虚部ともに正であるものを α とする．このとき, α^{2024} の値を求めなさい.

〔 II 〕 数列 $\{a_n\}$ を $a_3 = -4$, $a_9 = 5$ である等差数列とし, 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求め, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい.

(2) S_n を求め, $S_n > 0$ となる最小の自然数 n を求めなさい.

(3) $S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ を求めなさい.

〔 III 〕 1 から 9 までの整数を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入った袋がある. 袋からカードを 1 枚取り出し, カードに書かれた整数を調べてから袋に戻す. この試行を 4 回繰り返し, 1 回目, 2 回目, 3 回目, 4 回目に取り出したカードに書かれた整数をそれぞれ a, b, c, d とする.

(1) $a > b$ かつ $c > d$ である確率を求めなさい.

(2) $(a-b) \times (c-d)$ が偶数である確率を求めなさい.

(3) $a > b$ かつ $c > d$ であるとき, $(a-b) \times (c-d)$ が偶数である条件付き確率を求めなさい.

〔 IV 〕 原点を O とする座標平面上で, 点 $(3, 1)$ を通り, 傾きが t である直線を ℓ とする. 直線 ℓ と x 軸, y 軸の交点を, それぞれ P, Q とする. ただし, $t < 0$ とする.

(1) 直線 ℓ の方程式を求めなさい.

(2) $\triangle$OPQ の面積を t の関数として表しなさい.

(3) t が変化するとき, $\triangle$OPQ の面積の最小値と, そのときの t の値を求めなさい.