

## 2024 年度入学試験問題

## 数 学

(90分)

## 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子は開かないでください。
2. この問題冊子は2ページあります。試験中、ページの脱落等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。  
解答用紙の汚れなどに気づいた場合も、同様に知らせてください。
3. 監督者の指示に従って、解答用紙(4枚)それぞれに受験番号、氏名を記入してください。
4. 解答は、すべて解答用紙の指定箇所に記入してください。
5. 筆記用具以外は、使用しないでください。
6. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

〔 I 〕 この問題については、解答用紙の所定の欄に答えだけを書きなさい。

- (1) 整式  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 7$  を  $(x-2)(x+3)$  で割った余りが  $2x-1$  であるとき、定数  $a, b$  の値を求めなさい。
- (2)  $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = -2$  のとき、 $x^2 + x^{-2}$  の値を求めなさい。
- (3) 5個の数字 0, 1, 2, 3, 4 を使ってできる 3桁の整数のうち、3の倍数は何個あるか求めなさい。ただし、同じ数字は2度以上使わないものとする。
- (4)  $\frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi$  とする。関数  $y = \frac{2}{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}$  が最大値をとる  $x$  の値を求めなさい。

〔 II 〕 数列  $\{a_n\}$  の一般項は  $a_n = \frac{2(2n-1)}{n(n+1)(n+2)}$  であり、初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。

- (1)  $S_3$  の値を求めなさい。
- (2) 等式  $\frac{2(2n-1)}{n(n+1)(n+2)} = -\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + 5\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$  を示しなさい。
- (3)  $S_n > \frac{7}{6}$  を満たす最小の自然数  $n$  を求めなさい。

〔 III 〕  $\triangle OAB$  において、辺  $OA$  の中点を  $P$ 、辺  $OB$  の中点を  $Q$ 、辺  $AB$  の中点を  $R$  とし、 $\triangle OAB$  の重心を  $G$ 、 $\triangle OPQ$  の重心を  $G_1$ 、 $\triangle PAR$  の重心を  $G_2$ 、 $\triangle QRB$  の重心を  $G_3$  とする。

- (1)  $\overrightarrow{OG}$  を  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表しなさい。
- (2)  $\overrightarrow{OG_1}$ 、 $\overrightarrow{OG_2}$ 、 $\overrightarrow{OG_3}$  を  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いてそれぞれ表しなさい。
- (3)  $\triangle G_1G_2G_3$  の重心を  $G_4$  とするとき、 $\overrightarrow{OG_4} = \overrightarrow{OG}$  を示しなさい。

[ IV ]  $i$  を虚数単位とする. 実数  $t$  に対し, 複素数平面上の点  $z$  が方程式

$$\frac{z}{z-2i} = it$$

を満たしているとする.

- (1)  $z = -1 + i$  のときの  $t$  の値を求めなさい.
- (2)  $x, y$  を実数とし,  $z = x + yi$  とおく.  $t$  がすべての実数値をとって変化するとき,  $x, y$  の満たす方程式を求め, 点  $z$  の描く図形を図示しなさい.

[ V ]  $k$  は正の実数とする.  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  に対し, 曲線  $y = f(x)$ ,  $x$  軸, および直線  $x = k$  で囲まれた図形の面積を  $S(k)$  とする.

- (1)  $f'(x)$  を求めなさい.
- (2)  $y = f(x)$  の  $x = \log 2$  における接線の方程式を求めなさい.
- (3)  $S(k)$  の値を求めなさい.
- (4)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S(k)}{k}$  の値を求めなさい.