(解答)

〔 I 〕 (1)

$$
\begin{aligned}
y &= |\,x^2-2x-15\,| \\
&= |\,(x-5)(x+3)\,| \\
&= |\,(x-1)^2-16\,|
\end{aligned}
$$

$0 \leqq x \leqq 6$ より y は $x=0,1,6$ のいずれかで最大値をとる. $x=0$ のとき $y=15$, $x=1$ のとき $y=16$, $x=6$ のとき $y=9$. したがって, y は $x=1$ のとき最大値 16 をとる.

(2) 漸化式 $a_{n+1}=3a_n-6$ の特性方程式 $\alpha=3\alpha-6$ の解は $\alpha=3$ である. $\alpha=3$ を漸化式の両辺から引いて式変形をすると $a_{n+1}-3=3(a_n-3)$ となり, これを繰り返し用いると

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-3 &= 3(a_n-3) \\
&= 3^2(a_{n-1}-3) \\
&= \cdots \\
&= 3^n(a_1-3)
\end{aligned}
$$

となる. $a_1=1$ より $a_{n+1}-3=-2\cdot 3^n$ となり, これより $a_n=-2\cdot 3^{n-1}+3$ が得られる.

(3) 三角関数の合成により $\sqrt{3}\sin x-\cos x = 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ となることを用いて, 方程式を $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で解くと

$$
\begin{aligned}
2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) &= 0 \\
\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) &= 0 \\
x-\frac{\pi}{6} &= 0, \pi \\
x &= \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}
$$

となる.

[別解] $\cos x=0$ となる $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ は考えている方程式の解とはなっていないので, $\cos x \neq 0$ として考える. 方程式の両辺を $\cos x$ で割ると

$$
\sqrt{3}\tan x-1=0 \Longleftrightarrow \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}
$$

となり, $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす x は $x=\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}$ である.

(4) 真数条件より $x > -\frac{5}{2}$, $x > 0$ となる．

式変形により $\log_5(2x+5)x = \log_5 25$ である．これより $(2x+5)x = 25$ が導かれる．したがって，

$$2x^2 + 5x - 25 = (2x-5)(x+5) = 0$$

となり，$x = \frac{5}{2}, -5$ となる．ここで x の範囲により，答えは $x = \frac{5}{2}$ である．

(5) $(-88+16i) + a(-12-16i) + 32(2-4i) + b = 0$ より，$-88-12a+64+b = 0, 16-16a-128 = 0$. したがって $a = -7, b = -60$ を得る．

(6)

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos x} dx = \Big[\log|1-\cos x|\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \log|1-0| - \log|1-(1/2)| = \log 2$$

〔 II 〕 (1) 1 回目のじゃんけんでお互いのカードの出し方の場合の数は $5 \times 5 = 25$ 通りであり，A さんの勝ちとなるのは「A さんがパー，B さんがグー」となる場合の 4 通りか，「A さんがグー，B さんがチョキ」となる場合の 4 通りである．よって求める確率は

$$\frac{4+4}{25} = \frac{8}{25}$$

(2) あいこが起こるのはお互いにグーを出した場合だけなので，1 回のあいこ毎にお互いにグーのカードが 1 枚ずつ減っていくことに注意をして考える．最初に k 回 $(k = 1, 2, 3, 4)$ 連続であいこの確率を求める:

- 1 回目にあいこになる確率は $\frac{16}{25}$
- 2 回目にあいこになる確率は $\frac{9}{16}$ なので，2 回連続であいこの確率は $\frac{16}{25} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{25}$
- 3 回目にあいこになる確率は $\frac{4}{9}$ なので，3 回連続であいこの確率は $\frac{9}{25} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{25}$
- 4 回目にあいこになる確率は $\frac{1}{4}$ なので，4 回連続であいこの確率は $\frac{4}{25} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{25}$.

$k+1$ 回目に B さんが勝って勝負が終わる確率は，k 回連続であいことなり，その次の $k+1$ 回目に B さんが勝つ確率なので

- 1 回目のじゃんけんで B さんの勝ちで勝負が終わる確率は，$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$
- 2 回目のじゃんけんで B さんが勝つ確率は $\frac{1}{16}$ なので，2 回目に B さんの勝ちで勝負が終わる確率は $\frac{16}{25} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{25}$
- 3 回目のじゃんけんで B さんが勝つ確率は $\frac{1}{9}$ なので，3 回目に B さんの勝ちで勝負が終わる確率は $\frac{9}{25} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{25}$
- 4 回目のじゃんけんで B さんが勝つ確率は $\frac{1}{4}$ なので，4 回目に B さんの勝ちで勝負が終わる確率は $\frac{4}{25} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{25}$
- 5 回目のじゃんけんで B さんが勝つ確率は $\frac{1}{1}$ なので，5 回目に B さんの勝ちで勝負が終わる確率は $\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{25}$

である．よって求める確率は

$$\frac{1}{25}\times 5=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$

(3) 4 回目のじゃんけんで A さんが勝つ確率は $\frac{2}{4}$ となるので, 4 回目に A さんの勝ちで勝負が終わる確率は $\frac{4}{25}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{25}$ である．(2) より 4 回目に B さんの勝ちで勝負が終わる確率は $\frac{1}{25}$ だったので, 4 回目で勝負が終わる確率は

$$\frac{2}{25}+\frac{1}{25}=\frac{3}{25}$$

である．よって, 4 回目で勝負が終わった時に B さんが勝ちであった条件付き確率は

$$\frac{(4\text{ 回目で勝負が終わりかつ B さんが勝ちである確率})}{(4\text{ 回目で勝負が終わる確率})}=\frac{1/25}{3/25}=\frac{1}{3}$$

〔 III 〕 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 4\cdot\dfrac{1}{6}=2$

(2) 点 C は辺 AB を 2 : 1 に内分するので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ より

$$\begin{aligned}(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}) &= (\vec{b}-\vec{a})\cdot\left(k\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)-\vec{b}\right)\\ &= \left(-\frac{1}{3}|\vec{a}|^2+\frac{2}{3}|\vec{b}|^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}\right)k-|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}\\ &= 7k-14\\ &= 0\end{aligned}$$

これを解くと

$$k=2$$

(4) $\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=2:1$ より

$$\triangle\mathrm{OAC}:\triangle\mathrm{OCB}=2:1$$

$\mathrm{OC}:\mathrm{CD}=1:1$ より

$$\triangle\mathrm{BOC}:\triangle\mathrm{BCD}=1:1$$

したがって,

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{CBD} &= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3^2\cdot 4^2-2^2}\\ &= \frac{1}{3}\sqrt{35}\end{aligned}$$

〔 IV 〕 $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 - \frac{3}{2x}$ である.

(1) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸の交点の x 座標は, 方程式 $f(x) = 0$ を解いて $x = 1, 3$ である.

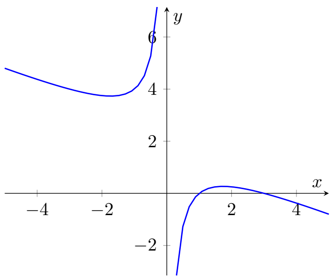
(2) $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2x^2}$, $f''(x) = -\frac{3}{x^3}$

(3) $f'(x) = 0$ となるのは $x^2 = 3$ のときなので, $x = \pm\sqrt{3}$. 増減, 凹凸の表は下記のとおり.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$
y	$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

極小値は $f(-\sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$, 極大値は $f(\sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$.

一方で, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 - \frac{3}{2x}$ なので, $\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-0} f(x) = \infty$ より $x = 0$ が漸近線を与える. また, $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-\frac{1}{2}x + 2)] = 0$, $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (-\frac{1}{2}x + 2)] = 0$ より $y = -\frac{1}{2}x + 2$ が漸近線を与える.



(4) 求める面積は, 積分をして

$$\int_1^3 f(x)dx = \left[-\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{3}{2}\log x\right]_1^3 = -\frac{3}{2}\log 3 + 2$$

となる.