解答

〔 I 〕 (1) 1 から 120 までの偶数の和と 5 の倍数の和から 10 の倍数の和を引けばいい. 1 から n までの和は $\dfrac{n(n+1)}{2}$ であることを用いると, 1 から 120 までの偶数の和は,

$$2+4+6+\cdots+120 = 2(1+2+3+\cdots+60) = 2\cdot\frac{60\cdot 61}{2} = 3660.$$

1 から 120 までの 5 の倍数の和は,

$$5+10+15+\cdots+120 = 5(1+2+3+\cdots+24) = 5\cdot\frac{24\cdot 25}{2} = 1500.$$

1 から 120 までの 10 の倍数の和は,

$$10+20+30+\cdots+120 = 10(1+2+3+\cdots+12) = 10\cdot\frac{12\cdot 13}{2} = 780.$$

したがって, 求める和は

$$3660+1500-780 = 4380.$$

(2) 因数定理から, 与えられた 3 次式は $(3x+2)$ を因数に持つ. 多項式の割り算を行うと

$$6x^3-2x^2+5x+6 = (3x+2)(2x^2-2x+3)$$

となる. 他の 2 つの解は $2x^2-2x+3=0$ を解けば良い.

$$2x^2-2x+3 = 2(x^2-x)+3 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+3 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2} = 0.$$

したがって $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 = -\dfrac{5}{4}$ となるので, 他の 2 つの解は $x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}i}{2}$ と求まる.

※ 2 次方程式の解の公式を用いても良い.

(3) 方程式 $\log_5(6x-1)-\log_{25}(4-9x)=0$ の真数の条件より, $6x-1>0$ かつ $4-9x>0$ であるので, $x>\dfrac{1}{6}$ かつ $x<\dfrac{4}{9}$, すなわち, $\dfrac{1}{6}<x<\dfrac{4}{9}$ となる. 与えられた方程式を変形すると

$$\begin{aligned}
\log_5(6x-1)-\log_{25}(4-9x) &= 0\\
\log_5(6x-1)-\frac{1}{2}\log_5(4-9x) &= 0\\
\log_5(6x-1)^2 &= \log_5(4-9x)\\
(6x-1)^2 &= 4-9x\\
12x^2-x-1 &= 0\\
(4x+1)(3x-1) &= 0\\
x &= -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

したがって, 真数の条件を満たす解は $x=\dfrac{1}{3}$ である.

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ となるときに $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直になる. よって,

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=0\\(2\sqrt{3},\ 1)\cdot(\sqrt{3}\,t,\ 2-t)&=0\\(2\sqrt{3})(\sqrt{3}\,t)+(2-t)&=0\\5t+2&=0\\t&=-\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

(5) 複素数を極形式で表すと,

$$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i}{2}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

より,

$$\left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i}{2}\right)^{12}=(\sqrt{2})^{12}\left(\cos 10\pi+i\sin 10\pi\right)=64.$$

〔 II 〕 (1) $t^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=1-2\sin x\cos x$ より, $\sin x\cos x=\frac{1}{2}(1-t^2)$ を得る. したがって,

$$f(x)=\frac{1}{2}(1-t^2)+t=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}.$$

(2) 三角関数の合成を行うと, $t=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ となる. x は 0 から π まで動くため, $-\dfrac{\pi}{4}\leqq x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ である. $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ の動く範囲は $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ となるため, t の動く範囲は $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ である.

(3) $f(x)$ を (1) で t の 2 次関数として表したものを平方完成すると

$$f(x)=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(t^2-2t)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1.$$

頂点の座標は $(1,1)$ で, (2) から $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ であるので $t=1$ のとき $f(x)$ は最大値 1 をとる. このとき

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\left(-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi\right)$$

であることから, $x=\frac{\pi}{2},\pi$ のときに最大値 $f(x)=1$ をとる.

$t=-1$ のときに最小値 -1 をとる. このとき

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となることから, $x=0$ のとき最小値 $f(x)=-1$ をとる.

〔 III 〕 (1) 直線 l の傾きが k で, 点 $\mathrm{P}(0,2)$ を通ることから, 直線 l の方程式は $y = kx + 2$.

(2) 点と直線の距離の公式を用いると, 直線 $kx - y + 2 = 0$ と円 C の中心 $(0,0)$ の距離 d は

$$d = \frac{|k \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 2|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$$

となる. 円 C と直線 l が接するのは, $d = 1$ のときであるから,

$$\frac{2}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

となり, これを解くと $k = \pm\sqrt{3}$ が得られる. 第 1 象限で接するのは k が負のときであり, $k = -\sqrt{3}$ となる.

※ 別解として, $y = kx + 2$ と $x^2 + y^2 = 1$ の連立方程式を考え, 出てきた 2 次方程式の判別式が 0 となる条件から k を求める方法がある.

(3) k が (2) で求めた値のとき, 直線 l の方程式は $y = -\sqrt{3}x + 2$ となる. これと円 C の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ の連立方程式を解くと,

$$\begin{aligned} x^2 + (-\sqrt{3}x + 2)^2 &= 1 \\ 4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 &= 0 \\ (2x - \sqrt{3})^2 &= 0 \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

このとき y の値は $y = -\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \dfrac{1}{2}$ となる. したがって, 接点の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ である.

(4) $\triangle\mathrm{OPQ}$ は, Q から OP に垂線を下ろすと, 底辺の長さが $\mathrm{OP} = 2$, 高さが (Q の x 座標) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の三角形なので, 面積は

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる.

〔 IV 〕 (1) $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-x}$.

(2) $f'(x) = 0$ となるのは $e^{3x} = 1$, すなわち $x = 0$ のときである. $x = 0$ で $f'(x)$ の符号は負から正に変わるので, $f(x)$ は $x = 0$ で極小値をとる. $x < 0$ のとき $f'(x) < 0$, $x > 0$ のとき $f'(x) > 0$ であることから, $x = 0$ で最小値をとることがわかり, その値は $f(0) = 3$ である.

(3) $f(x)=g(x)$ となるのは, $e^{2x}+2e^{-x}=2e^{x}+1$ のときである. $t=e^{x}>0$ とおいて, 両辺に t をかけて整理すると

$$t^{3}-2t^{2}-t+2=0$$

となる. この方程式の解を求める. 因数定理より, $t=1$ は解であることがわかり, $t-1$ で元の 3 次式を割ることで $(t-1)(t^{2}-t-2)=0$ となる. さらに因数分解すると,

$$(t-1)(t-2)(t+1)=0$$

となる. $t>0$ より $t=1,2$ が解である. $t=e^{x}$ に戻すと, $e^{x}=1,2$ となり, このときの x の値はそれぞれ $x=0,\log 2$ である.

(4) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とする. 交点の x 座標は $x=0,\log 2$ であり, $y=g(x)$ が上側, $y=f(x)$ が下側となるので,

$$\begin{aligned}
S &= \int_{0}^{\log 2}\{g(x)-f(x)\}\,dx \\
&= \int_{0}^{\log 2}\{(2e^{x}+1)-(e^{2x}+2e^{-x})\}\,dx \\
&= \left[2e^{x}+x-\frac{e^{2x}}{2}+2e^{-x}\right]_{0}^{\log 2} \\
&= \left(2\cdot 2+\log 2-\frac{4}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\right)-\left(2\cdot 1+0-\frac{1}{2}+2\cdot 1\right) \\
&= \log 2-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$