〔 I 〕

$$\begin{aligned} y &= \cos 2x + 2\sin x \\ &= 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x \\ &= -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$0 \leqq x < 2\pi$ より $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ なので，y は $\sin x = \dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}$，$\sin x = -1$ のとき最小値 -3 をとる．
ここで，$\sin x = \dfrac{1}{2}$ のとき $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$, $\sin x = -1$ のとき $x = \dfrac{3}{2}\pi$.
したがって，y は $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}$, $x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -3 をとる．

〔 II 〕 1 から 9 までの数のうち，奇数は 5 個，偶数は 4 個ある．異なる 9 枚のカードから同時に 2 枚取り出す方法は ${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ 通りある．

(1) 2 枚のカードの数の和が偶数であるのは，2 枚とも奇数の場合（${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り）か，2 枚とも偶数の場合（${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り）のいずれかであるから，全部で $10 + 6 = 16$ 通りある．よって，2 枚のカードの数の和が偶数になる確率は $\dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$ である．

(2) 2 枚のカードの数の和が 5 の倍数となるのは，和が 5，10，15 のいずれかのときである．それぞれ

$$\begin{aligned} 5 &= 1+4, 2+3 \quad 2\text{ 通り} \\ 10 &= 1+9, 2+8, 3+7, 4+6 \quad 4\text{ 通り} \\ 15 &= 6+9, 7+8 \quad 2\text{ 通り} \end{aligned}$$

の場合があり，全部で 8 通りある．よって，2 枚のカードの数の和が 5 の倍数となる確率は $\dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$ である．

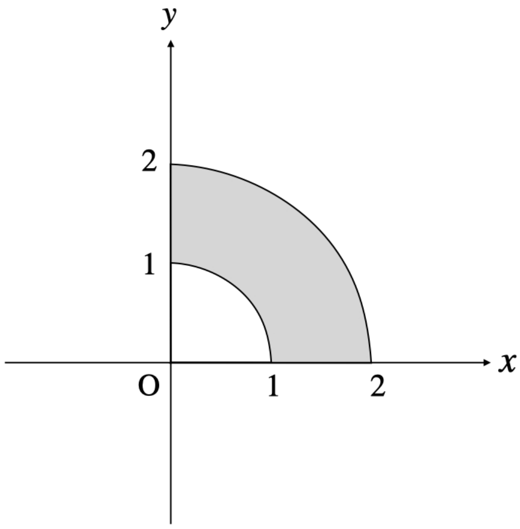
(3) 2 枚のカードの数の積が 3 の倍数とならないのは，3,6,9 のカード以外の 6 枚のカードから 2 枚取り出す場合（${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通り）である．したがって，2 枚のカードの数の積が 3 の倍数となる確率は

$$1 - \frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = 1 - \frac{15}{36} = \frac{7}{12}.$$

〔 III 〕 ベクトル方程式を成分で表すと $(x, y) = s(1, 0) + t(0, 1) = (s, t)$ であり，s, t の条件式を用いると，

$$1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4, \quad x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

となる．ここで，$x^2+y^2=1$ は原点を中心とする半径 1 の円，$x^2+y^2=4$ は原点を中心とする半径 2 の円を表す．したがって，求める存在範囲は，下図の灰色の図形の周とその内部である．



〔 IV 〕 (1) 解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=\alpha+\left(\alpha-2\sqrt{3}i\right)=2$$

であるから，$\alpha=1+\sqrt{3}i$，$\beta=1-\sqrt{3}i$．さらに解と係数の関係から，

$$m=\alpha\beta=\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)=4.$$

(2) 極形式を用いると，

$$\alpha=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

であり，

$$\alpha^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

である．α^n が正の実数となるのは，$n=6k$ $(k=1,2,\cdots)$ のときであり，最小となるのは $n=6$ のときである．このとき

$$\alpha^n=2^6=64.$$

〔 V 〕 下図のように直円柱の断面を考える．直円柱の高さを $2h$ とすると，$0<h<a$ であり，底面の半径は $\sqrt{a^2-h^2}$ で表される．このとき直円柱の体積は $V=2\pi h(a^2-h^2)$ であり，

$$\frac{dV}{dh}=2\pi(a^2-3h^2)=0$$

より，$h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$, すなわち高さが $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$ のとき体積が最大になる．このとき底面の半径は $\sqrt{a^2 - \dfrac{1}{3}a^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$ であり，体積の最大値は

$$V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}a^3$$

となる．