

M-AO 解答

〔 I 〕

(1)

$$f(x) = -(x-3)(x-12) = 0$$
$$x = 3, 12$$

である。よって、交点の x 座標は $x = 3, 12$ である。

(2) 放物線は上に凸であり、頂点の x 座標は $x = \frac{3+12}{2} = \frac{15}{2}$ であるから、 $0 \leq x \leq 10$ の範囲において、 $x = \frac{15}{2}$ で最大値をとり、最大値は

$$f\left(\frac{15}{2}\right) = -\left(\frac{15}{2}-3\right)\left(\frac{15}{2}-12\right) = \frac{81}{4}$$

である。また、 $x = 0$ で最小値を取り、最小値は $f(0) = -36$ である。

(3) $f'(x) = -2x + 15$ であるから、
点 $P(6, f(6)) = (6, 18)$ における接線 ℓ の傾きは

$$f'(6) = -2 \cdot 6 + 15 = 3$$

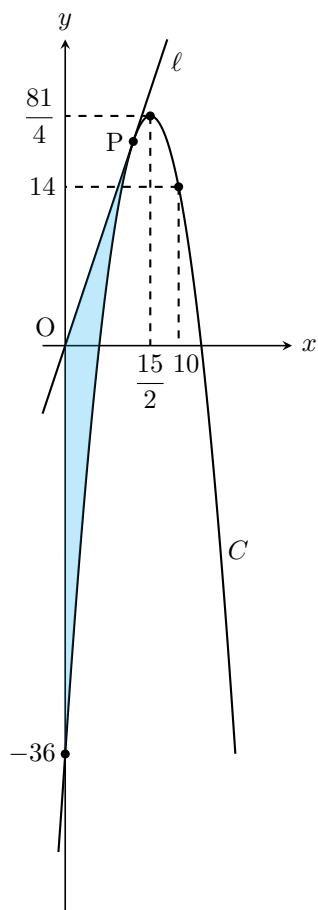
である。よって接線 ℓ の方程式は

$$y - 18 = 3(x - 6)$$
$$y = 3x$$

である。また、接線 ℓ と x 軸との交点は $(0, 0)$ である。
求める図形の面積を S とすると、

$$S = \int_0^6 \{3x - (-x^2 + 15x - 36)\} dx$$
$$= \int_0^6 (x^2 - 12x + 36) dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 36x \right]_0^6$$
$$= 72$$

である。



〔 II 〕

- (1) a, b, c は等差数列より, 公差を d とおくと, $b = a + d, c = a + 2d$ と表せるので,

$$a + c = 2a + 2d = 2(a + d) = 2b$$

となる.

- (2) c, a, b は等比数列より, 公比を r とすると

$$a = rc, \quad b = ra = r^2c$$

である. よって

$$bc = r^2c^2 = (rc)^2 = a^2$$

である.

- (3) (1), (2) と $a + 2b + c = 4$ から,

$$4b = (a + c) + 2b = 4$$

であり, $b = 1$ である. したがって, $a + c = 2b = 2, bc = c = a^2$ から,

$$a^2 + a - 2 = (a + 2)(a - 1) = 0$$

であり, $a = -2, 1$ である.

$a = 1$ のとき, $a = b = 1$ となり, a, b, c は互いに異なる数であるから不適である. $a = -2$ であるとき, $c = 4$ となり, $(a, b, c) = (-2, 1, 4)$ である.

[III]

(1)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$$

(2)

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3^2 - 2 \cdot (-6) + 4^2 = 37$$

よって, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{37}$ である.

(3) $\vec{a} \perp (\vec{a} + r\vec{b})$ であるから, $\vec{a} \cdot (\vec{a} + r\vec{b}) = 0$ である. よって

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + r\vec{b}) = 0$$

$$|\vec{a}|^2 + r\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$3^2 - 6r = 0$$

$$r = \frac{3}{2}$$

[IV]

(1)

$$f'(x) = -3e^{-3x} + 6$$

$$f''(x) = 9e^{-3x}$$

(2) $f'(x) = -3e^{-3x} + 6 = 0$ より,

$$e^{-3x} = 2$$

$$-3x = \log 2$$

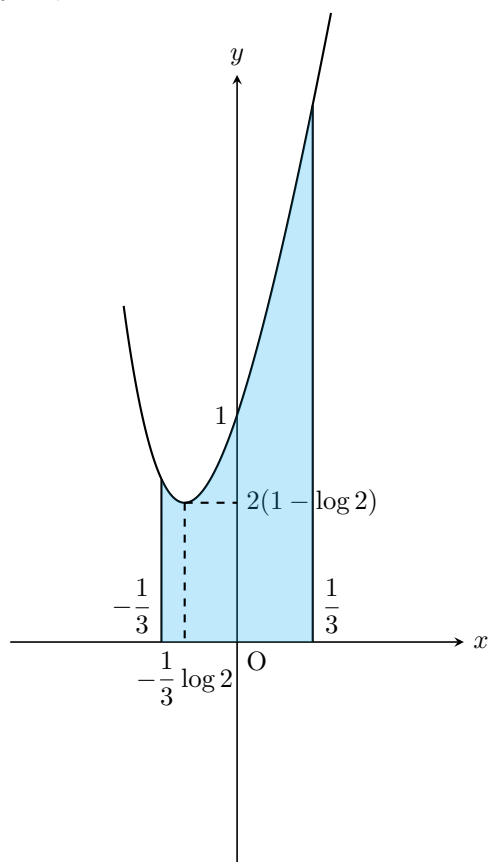
$$x = -\frac{1}{3} \log 2$$

$$f\left(-\frac{1}{3} \log 2\right) = 2 + 6\left(-\frac{1}{3} \log 2\right) = 2(1 - \log 2)$$

である. また, $f''(x) = 9e^{-3x} > 0$ であるからグラフは下に凸であり, 増減表は次のようになる.

x		$-\frac{1}{3} \log 2$	
$f'(x)$	-	0	+
$f''(x)$	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	$2(1 - \log 2)$	$\nearrow$

グラフの概形は次のようになる.



(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} (e^{-3x} + 6x) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}e^{-3x} + 3x^2 \right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3}(e - e^{-1}) \end{aligned}$$