IM-総合型 解答

〔 I 〕

(1)　$x = 1.\dot{7}1\dot{1}$ とおくと $1000x = 1711.\dot{7}1\dot{1} = 1710 + x$ だから, $x = \dfrac{1710}{999} = \dfrac{190}{111}$.

(答) $\dfrac{190}{111}$

(2)　解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \qquad \alpha\beta = 2$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} &= \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって, $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$ を 2 つの解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 0$$

両辺に 4 をかけて

$$4x^2 - 3x + 2 = 0$$

(答) $4x^2 - 3x + 2 = 0$

(3)　AB の傾きは $\dfrac{1-3}{5-2} = -\dfrac{2}{3}$. よって, 直線 AB に垂直な直線の傾き m は

$$m = \frac{3}{2}$$

また, AB の中点は

$$\left(\frac{2+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

よって, 線分 AB の垂直二等分線の方程式は

$$y = \frac{3}{2}\left(x - \frac{7}{2}\right) + 2$$

すなわち　$y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{13}{4}$

(答) $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{13}{4}$

(4)　$b_n = \dfrac{1}{1-a_n}$ とおくと, 数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \dfrac{1}{1-0} = 1$, 公差 1 の等差数列だから, $b_n = 1 + (n-1)\cdot 1 = n$. よって $n = \dfrac{1}{1-a_n}$ で, $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

【別解】$a_n = \dfrac{n-1}{n}$ と予想して数学的帰納法を用いてもよい.

(答) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

(5)　不等式を変形して

$$\begin{aligned} \cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 &\geqq 0 \\ 2\cos^2\theta - 1 - 3\cos\theta + 2 &\geqq 0 \\ 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 &\geqq 0 \\ (\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) &\geqq 0 \end{aligned}$$

よって

$$\cos\theta \geqq 1 \text{ または } \cos\theta \leqq \frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$\theta = 0 \text{ または } \frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi$$

(答) $\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi$

(6)

$$2^{10} = 1024 < 2026 < 2048 = 2^{11}$$

より

$$\begin{aligned} \log_2 2^{10} < \log_2 2026 < \log_2 2^{11} \\ 10 < \log_2 2026 < 11 \end{aligned}$$

よって, $\log_2 2026$ の整数部分は 10 である.
(答) 10

〔 II 〕

(1)　賞金 X (円) が a (円) である確率を $P(X=a)$ と表し, a (円) 以下である確率を $P(X \leqq a)$ と表す. 白玉の個数 w 個, 青玉の個数 b 個, 赤玉の個数 r 個として, (w,b,r) と表す. 賞金は $(w,b,r)=(0,2,1)$ のときが最高で 200 円であり, 賞金が 150 円以下になるのはその余事象であるから求める確率は

$$P(X \leqq 150) = 1 - P(X=200)$$

である. $P(X=200)$ は $(w,b,r)=(0,2,1)$ となる確率であるから

$$P(X=200) = \frac{{}_2\mathrm{C}_2 \times {}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3} = \frac{1}{\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{1}{20}$$

よって

$$P(X \leqq 150) = 1 - P(X=200) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

(2)　賞金 X のとり得る値は, $X=50,\ 100,\ 150,\ 200$ であり, それぞれの確率を求める.

$P(X=50)$：$(w,b,r)=(2,1,0)$ のときであるから

$$P(X=50) = \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$P(X=100)$：$(w,b,r)=(1,2,0),\ (2,0,1)$ のときであるから

$$P(X=100) = \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3} = \frac{3+3}{20} = \frac{3}{10}$$

$P(X=150)$：$(w,b,r)=(1,1,1)$ のときであるから

$$P(X=150) = \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$P(X=200)$：$(w,b,r)=(0,2,1)$ のときであり, (1) より

$$P(X=200) = \frac{1}{20}$$

よって, X の期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X=0) + 50 \times \frac{3}{10} + 100 \times \frac{3}{10} + 150 \times \frac{3}{10} + 200 \times \frac{1}{20} \\ &= 15 + 30 + 45 + 10 = 100 \end{aligned}$$

(答) (1) $\dfrac{19}{20}$　(2) 100 円

〔 III 〕

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 16 = 13$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6$$

(2)　$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-6}{3\cdot 4} = -\dfrac{1}{2}$. ここで, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より,

$$\theta = 120^\circ$$

(3)　$\left|\dfrac{t}{3}\vec{a} + \dfrac{1-t}{4}\vec{b}\right|$ が最小値をとるのは, $\left|\dfrac{t}{3}\vec{a} + \dfrac{1-t}{4}\vec{b}\right|^2$ が最小値をとるときである.

$$\begin{aligned}\left|\frac{t}{3}\vec{a} + \frac{1-t}{4}\vec{b}\right|^2 &= \frac{t^2}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{t(1-t)}{6}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{(1-t)^2}{16}|\vec{b}|^2 \\ &= 3t^2 - 3t + 1 \\ &= 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

よって, $\left|\dfrac{t}{3}\vec{a} + \dfrac{1-t}{4}\vec{b}\right|^2$ は $t = \dfrac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる. したがって, $\left|\dfrac{t}{3}\vec{a} + \dfrac{1-t}{4}\vec{b}\right|$ は $t = \dfrac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ をとる.

(答) (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -6$　(2) $\theta = 120^\circ$　(3) 最小値 $\dfrac{1}{2}$ ($t = \dfrac{1}{2}$ のとき)

〔 IV 〕

(1)

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = (-x^2)'e^{-x^2} = -2x\,e^{-x^2}.$$

(2)

$$\begin{aligned} g'(x) &= (xf(x))' = f(x) + xf'(x) \\ &= e^{-x^2} + x(-2x\,e^{-x^2}) = (1-2x^2)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

(3)　前問から

$$g'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2} = -2\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$$

であり,

- $0 \leqq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ の時 $g'(x) > 0$, よって $g(x)$ は増加,
- $\frac{1}{\sqrt{2}} < x$ の時 $g'(x) < 0$, よって $g(x)$ は減少,

となる．したがって $g(x)$ は $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の時に最大値をとる．この時

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

以上から, $g(x)$ は $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときに最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$ を取る．

（答） (1) $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$　(2) $g'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$　(3) 最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$ ($x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき)